$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma p_i \dot q_i - H)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma(\dot q_i \delta p_i + p_i \delta \dot q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i)\,dt \overset{!}{=} 0 \quad (4)$$

(Mit dem Zeichen δ anstelle des Differentialoperators d wird ausgedrückt, daß die Zeit nicht mitvariiert wird.)

Die Bahn wird an ihrem Anfangs- und Endpunkt im Phasenraum festgehalten, so daß

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \quad \delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0 \quad (5)$$

gilt. Damit ergeben sich, wie sogleich gezeigt wird, aus Gl. (4) wieder die kanonischen Bewegungsgleichungen.

II Kanonische Transformationen, erzeugende Funktionen

Kanonisch heißen Transformationen, welche die kanonische Form der Bewegungsgleichungen ungeändert lassen so, daß in den neuen Koordinaten

$$Q_i = Q_i(q,p) \quad , \quad P_i = P_i(q,p)$$

statt der Gleichungen (3) die Gleichungen

$$\dot Q_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad , \quad \dot P_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (6)$$

gelten. Die Gesamtheit der kanonischen Transformationen läßt sich aus dem Hamiltonschen Prinzip wie folgt herleiten:

Das Glied $\dot q_i \delta p_i$ in Gl. (4) wird zunächst durch partielle Integration und Verwendung der ersten der Gleichungen (5) umgeformt;

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot q_i\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(p_i \delta q_i)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} \dot p_i \delta q_i\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} \dot p_i \delta q_i\,dt \,, \quad 7$$

womit aus Gl. (4) in der Gestalt

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Sigma(\dot q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i})\delta p_i + \Sigma(-\dot p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i})\delta q_i)\,dt = 0 \quad 8$$

wegen der Beliebigkeit der Variationen $\delta p_i, \delta q_i$ die Identität der Eulerschen Gleichungen des Hamiltonschen Variationsprinzips mit den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen folgt. Das Hamiltonsche

Prinzip gilt koordinatenunabhängig, also in irgendwelchen kanonischen Koordinatenreihen q, p resp. Q, P. Diese Unabhängigkeit bleibt erhalten, wenn dem Integranden in der ersten Zeile der Gl. (4) die totale zeitliche Ableitung einer Funktion S, welche nur von den "alten" und "neuen" Koordinaten q, p resp. Q, P und der Zeit abhängt, hinzugefügt wird, da die Variation dieser Größe wegen der Bedingungsgleichungen (5) verschwindet. Es gilt nämlich

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} S(q, p, Q, P, t)\, dt = \sum \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial S}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} \delta Q_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} \delta P_i \right) \Bigg|_{t_1}^{t_2} = 0 \,,$$

weil aus $\delta q_i(t_{1,2}) = 0$, $\delta p_i(t_{1,2}) = 0$ auch $\delta Q_i(t_{1,2}) = \sum \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \delta q_k(t_{1,2}) + \sum \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \delta p_i(t_{1,2}) = 0$ und ebenso $\delta P_i(t_{1,2}) = 0$ folgt.

~~gilt~~. Wegen der vorausgesetzten Existenz der Transformationsgleichungen, kann S ohne Einschränkung als von nur zwei der vier Variablenreihen abhängig angenommen werden. Hier seien es die alten und neuen Lagekoordinaten q und Q. Dann gilt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum p_i \dot{q}_i - H \right) dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum P_i \dot{Q}_i - K \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} S(q, Q)\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial S}{\partial t} \right) dt = 0 . \tag{10}$$

Daraus ergeben sich durch Vergleich der Koeffizienten der $\dot{q}_i$ und $\dot{Q}_i$ die Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \text{und} \quad P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i} \,, \quad i = 1, 2, 3 \ldots r \,, \tag{11}$$

sowie durch Vergleich der übriggebliebenen Glieder die neue Hamiltonfunktion

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} \,. \tag{12}$$

Mit der Forderung an die Wirkungsfunktion S (q, Q, t), daß sie der Bedingung

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial Q_k} \right| \neq 0 \tag{13}$$

genüge, sind die Gleichungen (11) nach den q_i und Q_i auflösbar. Da S darüber hinaus beliebig ist, stellen die Gleichungen(11) die Gesamtheit der kanonischen Transformationen in impliziter Form dar. Die Wirkungsfunktion S ist die erzeugende Funktion dieser Transformationen.