

XIV Einfluß der Gravitation auf die Mikrobewegung

Im Vorhergehenden sind wir stets davon ausgegangen, daß die Gravitation die Mikrobewegung nicht beeinflusst. Folglich enthielt die Druckfunktion keine Größen wie die Gravitationskonstante oder den Abstand vom Sternzentrum.

Obschon diese Behandlung üblich ist, halten wir es für nötig und nützlich, die Verhältnisse zu quantifizieren. Es soll geschehen durch Vergleich der wegen des Massenunterschiedes von Proton und Elektron durch die Gravitation induzierten elektromotorischen Kraft (EMK) mit der Feldstärke, welche sich aus der Coulombenergie der Mikroteilchen ergibt. Die von der Gravitation induzierte EMK ist durch

$$|\varphi_{\text{grav}}| = \frac{G}{c} \frac{m_p \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) M(r)}{r^2} \approx \frac{G m_p}{c} \frac{M(r)}{r^2} = 10^{-22} \frac{M(r)}{r^2} \quad (53)$$

gegeben. Die Mikrofeldstärke berechnet sich aus der Nullpunktsenergie der Gl. (31), wenn wir diese im Sinne der Maxwell'schen Theorie als Feldenergie auffassen;

$$\frac{1}{8\pi} \langle \varphi^{*2} \rangle = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{V} \iiint (\varphi^2 - \sum \varphi_i^2) dV = (2\pi^2)^{1/3} e^2 n^{1/3}. \quad (54)$$

Die Feldstärke φ sei die Resultierende $\sum \varphi_i$ aus den Feldstärken der Punktladungen. $\frac{1}{8\pi} \iiint \varphi_i^2 dV$ stellt bekanntlich die Energie dar, welche benötigt wird, um eine auf das Unendliche verteilte

Elementarladung e auf das Volumen eines Elementarteilchens zu konzentrieren. Sie ist in Gl. (54) zu subtrahieren, weil sie zur Energie der Interaktion der Teilchen nichts beiträgt. Diese wird allein von den gemischten Gliedern mit $\varphi_i \varphi_k, i \neq k,$

wiedergegeben. Wir werden im Nachsatz näher auf die Gl. (54) eingehen.

Die Feldstärke aus dieser Gleichung (54)

$$|\varphi_{\text{eml}}| = \sqrt{\langle \varphi^4 \rangle} = (2^2 \pi)^{5/3} e n^{2/3} \quad (55)$$

ist unter allen denkbaren Bedingungen groß gegen die gravitationell bedingte Feldstärke nach Gl. (53). Schon bei der relativ kleinen Dichte $n = 10^{24} \text{ cm}^{-3}$ ergibt sich mit $|\varphi_{\text{eml}}| = 3 \times 10^8 \text{ e.s.t. F.} = 9 \times 10^{10} \text{ Volt/cm}$ eine Feldstärke, die weit größer ist als die gravitationelle an der Oberfläche eines Sternes mit einer Sonnenmasse ($2 \times 10^{33} \text{ g}$) bei dichter Kernpackung ($n = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$); $|\varphi_{\text{grav}}| = 30 \text{ Volt/cm}$. Nach Gl. (53) und (55) bekäme die gravitationelle EMK die Oberhand, wenn das Verhältnis der Gravitationskonstanten zur Elementarladung $\frac{G}{e}$ um mehr als 11 Zehnerpotenzen größer wäre, als es tatsächlich der Fall ist. Wenn aber die Mikrofelder ihre Dominanz verlören, wäre auch ein Druck, welcher durch die Mikrobewegung der Materie zustandekommt, nicht mehr recht vorstellbar. Die Mikroteilchen verhielten sich zusammengedrängt wie Billardbälle. Zum Auffang der Gravitationskräfte wäre dann eine Makrobewegung der Materie vonnöten. Man hätte an Verhältnisse zu denken, wie sie in den Saturnringen oder im Rotationsverhalten stationärer Galaxien vorliegen.

Nachsatz: Mit der Gl. (54) ist die Äquivalenz von Nahwirkungsenergie, ausgedrückt durch die rechte Seite, und Feldenergie $\frac{1}{8\pi} \varphi^2$ gegeben. Sie folgt allgemein aus der Maxwell'schen Theorie: Mit einem Potential φ , der Feldstärke $\vec{\varphi} = -\nabla\varphi$ und der Poisson-Gleichung $(\nabla, \vec{\varphi}) = 4\pi\sigma$ ergibt ^{der} Gaußsche (Greensche) Integralsatz

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \oint (\varphi \vec{\varphi}, d\vec{f}) &= \frac{1}{8\pi} \iiint (\nabla\varphi, \vec{\varphi}) dV + \frac{1}{8\pi} \iiint \varphi (\nabla, \vec{\varphi}) dV \\ &= -\frac{1}{8\pi} \iiint \varphi^2 dV + \frac{1}{8\pi} \iiint \varphi 4\pi\sigma dV, \end{aligned} \quad (56)$$

Infolge der Idealisierung der Teilchen als Punktladung haben die Integrale Pole für den Ort der Teilchen. Es ist üblich, diese Singularität dadurch zu vermeiden, daß man ein Volumenelement, etwa als Kugel mit dem Radius ξ , um die Teilchen ausschließt. Wenn dieses Volumen hinreichend klein ist, so daß das Potential in diesem Bereich als konstant angesehen werden kann, ergibt das Oberflächenintegral für die ^{i-te} Punktladung

$$\frac{1}{8\pi} \oint_{F_i} (\varphi \vec{\varphi}, d\vec{f}) = \frac{1}{8\pi} \oint 4\pi e_i = \frac{1}{2} \oint e_i \quad (57)$$

Die zweite das gesamte Volumen einschließende Fläche liegt im Unendlichen und gibt mit Coulombpotentialen keinen Beitrag. Wir führen die Rechnung am Beispiel eines Paares aus Proton und Elektron durch. Diese mögen sich am Ende der Vektoren $\vec{r}_+$ und $\vec{r}_-$ befinden, welche von einem beliebigen Nullpunkt ausgehen.

Für einen beliebigen Aufpunkt M ergibt das Oberflächenintegral

$$\text{mit } \varphi(M) = \varphi_+(M) + \varphi_-(M) = \frac{e}{|M_+ - M|} + \frac{-e}{|M_- - M|} \quad \text{und } \varphi = \varphi_+ + \varphi_-$$

$$\frac{1}{8\pi} \oint (\varphi \vec{f}, d\vec{f}) = \frac{1}{8\pi} \oint_{F_+ = 4\pi \varepsilon^2} (\varphi_+ + \varphi_-) \varphi_+, d\vec{f} + \frac{1}{8\pi} \oint_{F_- = 4\pi \varepsilon^2} (\varphi_+ + \varphi_-) \varphi_-, d\vec{f}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^2}{|M_+ - (M_- + \vec{\varepsilon})|} + \frac{1}{2} \frac{-e^2}{|M_- - (M_+ + \vec{\varepsilon})|} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{|M_- - (M_- + \vec{\varepsilon})|} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{|M_- - (M_+ - \vec{\varepsilon})|} \quad (58)$$

$$= \frac{e^2}{|\vec{\varepsilon}|} + \frac{-e^2}{|M_+ - (M_- + \vec{\varepsilon})|}.$$

Das erste Volumenintegral der Gl. (56) ergibt denselben Wert.

Das zweite Volumenintegral verschwindet, da im Volumen

zwischen den Flächen F_+ und ∞ resp. F_- und ∞

keine Raumladung vorhanden ist, also $\hat{\rho} = 0$ gilt.

Die im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ auftretenden Pole lassen sich vermeiden, wenn den Elementarteilchen endliche Ausdehnung und damit eine endliche Ladungsdichte zugestanden wird. Die Elementarteilchen sind dann nicht mehr durch um sie gelegte Flächen auszusparen. Das Integrationsgebiet reicht von ihrem Mittelpunkt bis ins Unendliche. Unter diesen Voraussetzungen verschwindet das Oberflächenintegral der Gl. (56) mit $\varepsilon \rightarrow 0$. Dagegen verschwindet das zweite Volumenintegral jetzt nicht mehr. Denkt man sich die Ladung auf eine Kugeloberfläche der Teilchen verteilt, so ergibt sich wieder der Wert der Gl. (58).

Die Gl. (54) wurde im Nachsatz nicht nur zur Verdeutlichung auf

ihre Grundlagen zurückgeführt, sondern um vor Augen zu führen, daß sie im Grenzfall hoher Dichten ihren Sinn verliert.

Die Voraussetzung, ^{näherlich} daß das Potential über das Volumen eines Teilchens konstant sei, ist offenbar nicht mehr erfüllt.

Die Feldenergie und selbst ihre Änderung über das Volumen eines Teilchens ist von der Größenordnung der Ruhenergie eines Teilchens. In Übereinstimmung damit steht, daß unsere

Nullpunktsenergie nach Gl. (31) für das Elektron eines Wasserstoffplasmas bei der Dichte $n = 1,75 \times 10^{37} \text{ cm}^{-3}$

eine Energie liefert, die gleich der Ruhenergie des Elektrons ist. Bei Dichten dieser Größenordnung werden also die Entstehung und Vernichtung von Teilchen in Betracht zu ziehen sein.