XIII Der Virialsatz in der Hydromechanik

An die Stelle des Virials $\sum(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{K}_i) = -\sum(\mathfrak{r}_i, \nabla U)$ der Punktmechanik tritt in der Hydromechanik das Virial in Integralform; $\int(\mathfrak{r}, P\,d\vec{F})$

(Der Druck P sei stets isotrop.) Nach dem Gaußschen (Greenschen) Integralsatz gilt

$$\oint\!\!\oint_F (\mathfrak{r}, P\,d\vec{F}) = \oint\!\!\oint (P\mathfrak{r}, d\vec{F}) = \iiint(\nabla, (\mathfrak{r}P))\,dV \qquad (49)$$
$$= 3\iiint P\,dV + \iiint(\mathfrak{r}, \nabla P)\,dV$$
$$= 2\iiint \langle E_{kin}\rangle + \iiint(\mathfrak{r}, \nabla P\,dV.$$

Mit auf der Oberfläche konstantem Druck $P = P_F$ folgt daraus

$$3P_F V = 3\iiint P\,dV + \iiint(\mathfrak{r}, \nabla P)\,dV. \qquad (50)$$

Wenn kein Druckgradient vorliegt, wie z.B. in einem Körper bei der Bestimmung seines Kompressionsmoduls, so liefert die Gl. (50) mit $3P_F V = 3\iiint P\,dV = 3P_F V$ keine Aussage.

Den Fall eines nichtverschwindenden Druckgradienten betrachten wir am Beispiel eines kugelsymetrisch aufgebauten Sterns. Der Druckgradient ist dann durch die hydrostatische Gleichung

$$\nabla_r P = -G\,\frac{\varrho(r)\int_0^r \varrho(r')\,4\pi r'^2\,dr'}{r^2} \equiv -G\,\frac{\varrho(r)\,M(r)}{r^2}$$

gegeben. (G Gravitationskonstante, ϱ Massendichte)

Einsetzen in Gleichung (5o) gibt

$$2 \iiint \langle E_{kin} \rangle \, dV - 3 P_F V = G \int \frac{\varrho(r)\, M(r)}{r} \, 4\pi r^2 dr = - U_{Grav.} \qquad (51)$$

Legt man die Oberfläche so weit nach außen, daß der Druck gegen Null geht, so stellt die Gl. (51) mit $P_F \to 0$ den Virialsatz der Hydromechanik in seiner bekannten Form (d.h. ohne das Oberflächenglied $3 P_F V$) dar; die doppelte kinetische Energie der Sternmaterie ist gleich dem Absolutbetrag der potentiellen Gravitationsenergie, wie es die allgemeine Theorie nach Abschnitt VII verlangt.
Die Hydromechanik legt uns daher als makroskopische Theorie nicht von vornherein auf zu sagen, welcher Natur die kinetische Energie ist.
Hier soll ausgeschlossen werden, daß sie ganz oder teilweise die Energie makroskopischer Bewegungen ist. Extremfälle der mikroskopischen Teilchenbewegung sind die thermische Bewegung und die Nullpunktsbewegung. Im thermischen Fall ist kT groß gegen alle Wechselwirkungsenergien der Teilchen. Im Fall der Entartung ist die kinetische Energie pro Teilchen nach Gl. (3o) proportional zu $n^{2/3}$ und damit größer als die potentielle Coulombenergie $n^{1/3}$.
Sie ist also nach der konventionellen Theorie, wie unter Abschnitt XII ausgeführt, ~~also~~ eine quasithermische Energie.
Legt man unsere Theorie zugrunde, so folgt aus Gl. (2o) mit $s = -1$ für Coulombwechselwirkung $2 \langle E_{kin} \rangle = - \langle U \rangle$ und damit aus Gl. (51)

$$2 \iiint \langle E_{kin} \rangle \, dV = - \iiint \langle U \rangle \, dV = - U_{Coul} = - U_{Grav} ; \qquad (52)$$

die Gravitationsenergie des Sterns ist gleich der Coulombenergie der Mikrofelder der Sternmaterie. (Die Gleichheit rührt daher, daß Gravitations- und Coulombkraft dem gleichen Abstandsgesetz gehorchen. Wären die Elektronen harmonische Oszillatoren, so träte mit $\zeta = 2$ an die Stelle der Gl. (52) $2\,U_{osz} = -U_{Grav}$).