# XI Eine Klassische Ableitung der Nullpunktsenergie

Für den Potentialterm der Gl. (22) gilt jetzt

$$\sum_{1}^{N} \frac{-e^2}{|\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_i|} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left( \frac{-e^2}{|\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_k|} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{|\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_k|} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{|\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_k|} \right) \tag{41}$$

$$= -(2\pi^2)^{1/3} e^2 \int n^{4/3} dV \; .$$

Da in dieser Gleichung jeder Nenner proportional zu $n^{1/3}$ ist, kann es unentschieden bleiben, ob die Doppelsumme infolge der Quasineutralität ganz verschwindet oder einen endlichen Beitrag liefert. Dieser wäre gegebenenfalls in das Potential

$\left\langle \frac{e^2}{|\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_i|} \right\rangle = -(2\pi^2)^{1/3} e^2 n^{1/3}$ hereingezogen zu denken.

Weil die Nullpunktsenergie nach den Gleichungen (31) und (40) quantentheoretische Charakteristika nicht mehr enthalten, muß deren Herleitung auch auf klassischem Wege möglich sein. Wir wollen eine Ableitung vollziehen, weil mit ihr eine Erweiterung der Gl. (31) und (41) auf Plasmen mit Kernen der Ladungszahl $Z$ erfolgt. Ausgangspunkt ist die Poissongleichung der Elektrostatik bei Kugelsymmetrie;

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -4\pi \sigma(r) \tag{42}$$

Der (punktförmige) Kern befinde sich an der Stelle r = o. Analog zum klassischen Atommodell von J.J. Thompson wird angenommen, daß die Ladung von $Z$ Elektronen auf das spezifische

Volumen eines Kerns

$$\frac{4\pi}{3} R_z^3 = \frac{1}{n_z} \tag{43}$$

gleichmäßig verteilt ist, so daß ihre elektrische Ladungsdichte durch

$$\sigma = -Z e n_z \tag{44}$$

gegeben ist. Bei der Integration der Gl. (42) wird über die beiden Integrationskonstanten so verfügt, daß das Potential und die Feldstärke auf der Oberfläche der Kugel nach Gl. (43) die Werte $-ze/R_z$ resp. $-ze/R_z^2$ annehmen.
Für die negative Ladung ergibt die Lösung der Potentialgleichung (42)

$$\varphi_- = \begin{cases} ze\left(\frac{1}{2} r^2/R_z^3 - \frac{3}{2}/R_z\right) & , r \leq R_z \\ -ze/r & , r \geq R_z \end{cases} \tag{45}$$

Diesem Potential ist das der positiven Punktladung

$$\varphi_+ = ze/r \quad , \quad 0 \leq r \leq \infty \tag{46}$$

hinzuzuzählen. Die Summe beider Potentiale $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$ ist für $r \geq R_z$ null. Mit der Wahl der Randbedingung ist der Quasineutralität in rigoroser Weise genüge getan, da wegen der notwendigen Überlappung der allen Kernen zugeordneten Kugelvolumina, eine solche Zuordnung exakt gar nicht erfüllt sein kann.

Sicher ist sie aber nur eine in der Physik übliche und im Prinzip zu verbessernde Annäherung an die Wirklichkeit, wohingegen die vorgeführten Annahmen der konventionellen Theorie der Entartung die Axiome der klassischen Mechanik außer acht lassen.

Unsere Modellvorstellung bringt es mit sich, daß das Potential der homogenen verteilten Elektronen nach Gl. (45) für $r \leq R_Z$ als das einer harmonischen Kraft auftritt, so daß das Gesamtpotential keine homogene Funktion der Abstandskoordinaten mehr ist, wie es bei Ableitung des Virialsatzes in Abschnitt G angenommen wurde. Wir können daher die kinetische Energie nicht mehr direkt aus der potentiellen Energie bestimmen. Statt dessen haben wir sie gemäß der generellen Beziehung

$$m(\mathfrak{r}, \ddot{\mathfrak{r}}) = m\frac{d}{dt}(\mathfrak{r}, \dot{\mathfrak{r}}) - m\dot{\mathfrak{r}}^2 = (\mathfrak{r}, \mathfrak{K}) = -(\mathfrak{r}, \nabla U) \qquad (47)$$

aus dem Virial $(\mathfrak{r}, \mathfrak{K}) = -(\mathfrak{r}, \nabla U)$ zu berechnen.

Mit Gl. (43), (44), (45) und (46) ergibt sich so die kinetische Energie pro Volumeneinheit

$$\langle E_{kin} \rangle = -\frac{1}{2}\frac{1}{V}\int(\mathfrak{r}, \mathfrak{k})\,dV = \frac{1}{2}\frac{G}{V}\int_{V=1/n_Z} r\frac{d}{dr}\left(\rho_+ + \frac{1}{2}\rho_-\right)4\pi r^2 dr \qquad (48)$$

$$= \frac{1}{5}(2^2 3^2 \pi)^{1/3} Z^2 e^2 n_Z^{4/3}.$$

(Mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ vor $\rho_-$ wird Doppelzählung der Elektronen vermieden. $\mathfrak{k}$ ist die Kraft pro Volumeneinheit.)

Für $Z = 1$ ergibt sich also bis auf den Zahlenfaktor $\chi = \frac{1}{5}(2^4 3^2/\pi)^{1/3} = 0{,}71$ der Ausdruck der Gl. (31), den die Korrespondenzbetrachtung geliefert hat.