IV Integrale der Bewegungsgleichungen (I.d.B.), Reduktion der Ordnung

Ein I.d.B. liegt in einer Funktion F (q,p,t) vor, wenn diese bei jeder Bewegung des Systems q (t), p (t) konstant bleibt, so daß

$$\frac{d}{dt} F(q,p,t) = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0$$

und mit den Bewegungsgleichungen (3) also

$$\frac{dF}{dt} = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0 \qquad (15)$$

gilt.

Ein I.d.B. reduziert die Ordnung des Systems der Diffgl. (3) um zwei Ordnungen, da sich mit ihm darin eine Variable, q_k oder p_k, eliminieren läßt und die kanonisch zugeordnete Variable, p_k oder q_k, dann wegen $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$ oder $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0$ eine Konstante ist. Wenn mehrere I.d.B. vorliegen, so reduzieren diese die Bewegungsgleichungen nur dann um jeweils zwei Ordnungen, wenn sie in "Involution liegen", d.h. wenn die Summe in Gl. (15)

$$\sum \left(\frac{\partial F_l}{\partial q_i} \frac{\partial F_s}{\partial p_i} - \frac{\partial F_l}{\partial p_i} \frac{\partial F_s}{\partial q_i} \right) = \{ F_l , F_s \}$$

verschwindet. Man schreibt die Summe dieser in Form einer Klammer ohne Bezugnahme auf die kanonischen Variablen q_i, p_i, weil sie in beliebigen kanonischen Variablen ausgedrückt werden kann, also eine Invariante der Theorie ist. Zu Beginn der quantenmechanischen Betrachtungen werden wir auf diesen Klammerausdruck, welcher nach Poisson benannt wird, zurückkommen.

Die Hamiltonfunktion ist selbst ein I.d.B., wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängt, da mit F = H die Klammern in Gl. (15) offenbar einzeln identisch verschwinden. Der Spezialisierung auf eine zeitlich konstante Hamiltonfunktion H = const = E entspricht für die erzeugende Funktion der Ansatz

$$S = -Et + S^*\ ,$$

weil die part. H. J. Diffgl. (14) damit wieder

$$H(q, \frac{\partial S^*}{\partial q}) = E$$

ergibt. Diese Gleichung ist die part. H. J. Diffgl. für konservative Systeme.

Für das Folgende werden Magnetfelder nicht in Betracht gezogen. Die Hamiltonfunktion eines konservativen Systems ist dann durch die Gesamtenergie E aus kinetischer und potentieller Energie, $H = E_{kin} + U = E$, gegeben und damit die Lagrangefunktion nach Gl. (1) bei Verwendung der Gl. (3) als die Differenz aus kinetischer und potentieller

Absatz 2 Energie; $L = E_{kin} - U$. Nachsatz. Um zu verifizieren, daß sich damit die "richtigen" Bewegungsgleichungen ergeben, gehe man von kartesichen Koordinaten aus. Aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ergeben sich dann die Newtonschen, welche in diesen Koordinaten formgleich mit den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 2. Art, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, sind, z.B. in einer Koordinate;

$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot x}(\frac{1}{2}m\dot x^2 - U(x)) = m\ddot x = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}m\dot x^2 - U(x)) = -\frac{\partial U}{\partial x}$. Die Lagrangeschen Gleichungen sind ihrerseits invariant gegenüber beliebigen (auflösbaren) Punkttransformationen $x_i = x_i(q_1, q_2, \dots)$, da sie die Eulerschen Gleichungen des Hamiltonprinzips als Funktionen der $q, \dot q$ sind, wie es die kanonischen Bewegungsgleichungen als Funktionen der q, p sind.