III Die partielle Hamilton-Jakobische Differentialgleichung (H.-J.-Diffgl.)

Ein vorgegebenes Problem H (q, p, t) ist dann auf eine Gleichgewichtsbewegung transformiert, wenn es gelingt eine neue Hamiltonfunktion K gemäß Gl. (12) anzugeben, die als Funktion von irgend zwei der vier Koordinaten identisch verschwindet. Dies wäre erreicht mit der Lösung der partiellen H.J.Diffgl., die sich aus der Gl. (12) ergibt, wenn darin die ersten der Gl. (11) eingesetzt werden;

$$K = H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t} = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \;, \qquad (14)$$

Eine Lösungsfunktion S (q, Q, t) stellt in der Terminologie der Theorie partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung ein "allgemeines Integral" dar, wenn sie der Bedingung (13) genügt. Die neuen Koordinaten Q sind hierin die Integrationskonstanten. Setzt man nämlich eine Lösungsfunktion S in Gl. (14) ein, so verschwindet diese und damit die neue Hamiltonfunktion K identisch. Insbesondere folgt dann für K = K (Q, P, t) $\equiv$ 0 aus den Gleichungen (3) 6/7, daß alle neuen kanonischen Koordinaten Q, P konstant sind (Satz von Jakobi). Die Integration der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen wäre damit geleistet; aus den Transformationsgleichungen (11) erhielte man durch Auflösung nach den alten Koordinaten

$$q_i = q_i(Q,P,t) \;, \quad p_i = p_i(Q,P,t) \;,$$

worin sich die Q, P aus den zu $t = t_o$ gehörigen Koordinaten $q\,(t_o)$, $p\,(t_o)$ ergeben.