

Diese Abhängigkeit gilt dann auch für das zeitliche Mittel der potentiellen Energie und wegen des Virialsatzes ohne Einschränkung auch für das zeitliche Mittel der kinetischen Energie.

Damit geraten wir in einen fundamentalen Gegensatz zur Gesetzlichkeit entarteter Teilchen, hier der entarteten Elektronen, da deren kinetische Energie von der Dichte in der Zweidrittelpotenz abhängt. Dieser Widerspruch besteht aufgrund der obigen Herleitung allgemein zunächst nur vom Standpunkt der klassischen Physik aus. Die quantentheoretischen Beispiele hatten aber gezeigt, daß die klassische Quantentheorie die klassischen Energiewerte nicht modifiziert, sondern aus ihnen nur eine Auswahl trifft. Mit diesem gequantelten Energiewert gilt wie mit jedem klassischen Energiewert der Virialsatz. Der Beweis ist aber nur im Einzelfall zu erbringen, wozu die Kenntnis der Bahndurchlaufung nötig ist, wie am Beispiel des Keplerproblems verifiziert wurde.

VIII

Charakterisierung der Quantelung durch das Wirkungsintegral

Das Wirkungsintegral $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ läßt sich mit der Gl. (10) folgendermaßen schreiben;

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\sum p_i \dot{q}_i - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\sum P_i \dot{Q}_i - K) dt + S(t_2) - S(t_1),$$

Ist die Erzeugende S ein vollständiges Integral der H. J. Diffgl., so gilt $K \equiv 0$ und also $\dot{Q}_i = 0$, womit

$$\int_{t_1}^{t_2} (\sum p_i \dot{q}_i - H) dt = S(t_2) - S(t_1)$$

und speziell für ein konservatives System, d.h. mit $H = E$, $S = -Et + S^*$ und $p_i = \frac{\partial S^*}{\partial q_i}(q_i, Q)$,

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = \sum \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial S^*}{\partial q_i} dt = S^*(t_2) - S^*(t_1)$$

folgt. Sobald nun wie in unseren Beispielen die Wirkungsfunktion

*
S in Summanden zerlegt werden kann, welche jeweils von nur einer alten Variablen q_i abhängen, ergibt sich schließlich mit

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = \sum_i \int_{q_{i1}}^{q_{i2}} \frac{d}{dq_i} S_i(q_i, Q) dq_i = \sum_i (S_i^*(q_i(t_2), Q) - S_i^*(q_i(t_1), Q))$$

die Form, an der Quantelung vorgenommen wurde. Bei allen Problemen, die von der alten Quantentheorie erfolgreich behandelt werden konnten, liegt eine Erzeugende alias Wirkungsfunktion vor, die in dieser Weise nach den Variablen q_i separiert ist, so bei der relativistischen Behandlung des Keplerproblems zur Klärung der Feinstruktur (durch Sommerfeld) und bei der Berechnung des Starkeffekts des Wasserstoffatoms (durch K. Schwarzschild). Man knüpfte daher die Definition der Quantenbedingung an diese Form der Wirkungsfunktion. Darin liegt von vornherein eine Beschränkung, weil die Angabe einer Erzeugenden in geschlossener Form im allgemeinen nicht möglich ist. (Schon im *Winn* *von den 18 zur Integration nötigen Integralen*)
das allgemeine Dreikörperproblem können über die 10 elementaren Integrale Schwerpunkt-, Impuls-, Drehimpuls- und Energiesatz hinaus nur noch zwei weitere angegeben werden. Für das übrigbleibende System von $18 - 12 = 6$ Bewegungsgleichungen gilt, daß (nach Bruns) keine algebraische Integrale und (nach Poincaré) daß keine Integrale existieren können, welche periodische analytische Funktionen sind.)

Die klassische Quantentheorie hat also auch in dieser Hinsicht vorläufigen Charakter. Wir haben die obigen Zusammenhänge dennoch hervorgehoben, um so weit wie es eben möglich ist, eine Analogie herzustellen zwischen der Quantenbedingung der klassischen Theorie nach Gl. (24)

$$\sum \oint p_i dq_i = \sum \oint \frac{dS_i}{dq_i} dq_i = \sum g_i h \quad (25)$$

und der Quantenbedingung

$$4\pi \left(\frac{1}{2m}\right) p^2 dp \cdot V = N h^3 = h^3 \int N(p) dp \quad (26)$$

wie sie der Berechnung der Entartungsenergie zugrunde liegt.
(Vom Spin ist hier abgesehen; daher der Faktor 4π statt 8π .)
Wenn die Analogie auch ^{ausgeprägt} wenig erscheinen mag, so bedenke
man doch, daß es für die klassische Quantenbedingung der Gl. (25)
keinerlei Begründung außer derjenigen gibt, welche ihr der
Erfolg verleiht. So ~~kann~~ ^{konnte} man es auch mit der Quantenbedingung
nach Gl. (26) für ein N-Körperproblem versuchen, da es ja
Lösungen dieses Problems in geschlossener Form nicht geben kann.
Die Erklärung der spezifischen Wärme "entarteter" Elektronen schien
diesen Ansatz auch zu rechtfertigen.

Zum Verständnis mag auch die Historie helfen, da die Formulierung
des Ausschließungsverbots, auf das sich die ^{Gleichung} Beziehung (26)
gründet, noch zu Zeiten der klassischen Atomtheorie, kurz
vor der Veröffentlichung der ersten Arbeit Heisenbergs zur
Quantenmechanik erfolgte. (Pauli, W.:
Heisenberg, W.)

Somit war die allgemein gültige Quantenbedingung in der Form der
Vertauschungsrelationen noch nicht bekannt. Man konnte folglich
auch kein "Verständnis" der Quantenbedingung haben.

B B Die Entartungsenergie und ihre Ersetzung. Gravitation und Entartung

IX Die Entartungsenergie:

Mit der Definition der auf den Impulsbetrag p bezogenen
Anzahldichte $N(p)$ nach Gl. (26) kann das Ausschließungsprinzip
formuliert werden, da die Beziehung

$$N(p) dp \leq \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3} \quad (27)$$