

VIII Verallgemeinerung^{ente} Ableitung des Virialsatzes

Es wird zunächst ein System von nur zwei Teilchen ins Auge gefaßt und gefordert, daß die räumliche Ausdehnung dieser Teilchen für beliebige Zeiten beschränkt ist und die die Bewegung verursachende Kraft ein Potential hat, welches eine homogene Funktion der Abstandskordinaten $r_{12} = |u_1 - u_2|$ ist, also durch $U = c r^s$ gegeben ist. Siehe dazu Fig. 2.

Multipliziert man die Newtonschen ^{Bewegungsgl.} Gleichungen für die Teilchen 1, 2 skalar mit den ihnen nach Fig. 2 zugeordneten Vektoren $\vec{u}_{1,2}$ von einem beliebigen Aufpunkt 0 aus, so ergibt sich - man beachte actio = reactio -

$$m_1(u_1, \ddot{u}_1) = c(u_1, -\nabla_1 r_{12}^s) = c s (u_1, r_{12}^{s-1} \frac{u_2 - u_1}{r_{12}})$$

$$m_2(u_2, \ddot{u}_2) = c(u_2, -\nabla_2 r_{12}^s) = c s (u_2, r_{12}^{s-1} \frac{u_1 - u_2}{r_{12}})$$

Durch Addition und Einführung der Beziehung $(u, \ddot{u}) = \frac{d}{dt}(u, \dot{u}) - \dot{u}^2$ folgt

$$\frac{d}{dt} (m_1(u_1, \dot{u}_1) + m_2(u_2, \dot{u}_2)) = m_1 \dot{u}_1^2 + m_2 \dot{u}_2^2 - c s r^s \quad (10)$$

und daraus unter den gemachten Voraussetzungen durch zeitliche Mittelung

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} \frac{1}{T} (m_1(u_1, \dot{u}_1) + m_2(u_2, \dot{u}_2)) \Big|_0^T \rightarrow 0 = \lim_{T \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T (m_1 \dot{u}_1^2 + m_2 \dot{u}_2^2) dt - \frac{s}{T} \int_0^T c r^s dt \right)$$

$$= 2 \langle E_{kin} \rangle - s \langle U \rangle$$

(20)

Bei Coulomb- (oder Gravitations-) Wechselwirkung ist $S = -1$, bei linearem Kraftgesetz $S = 2$, so daß sich wieder die schon am Beispiel verifizierte Beziehung $2 \langle E_{kin} \rangle = - \langle U \rangle$ resp. die zu beweisende Beziehung $\langle E_{kin} \rangle = \langle U \rangle$ ergibt.

Wir beschränken uns für das Folgende auf Coulombwechselwirkung und betrachten ein System von Protonen und Elektronen, welches zunächst wieder nur aus je zwei Teilchen bestehen möge. Die gleiche Prozedur wie oben führt auf die der obigen Gl. (20) analoge Gleichung.

$$\frac{d}{dt} \sum_1^2 (m(\dot{u}_i, \dot{u}_i) + M(\dot{r}_i, \dot{r}_i)) = \sum_1^2 (m\dot{u}_i^2 + M\dot{r}_i^2) + \frac{-e^2}{|r_1 - u_1|} + \frac{-e^2}{|r_2 - u_1|} + \frac{-e^2}{|r_1 - u_2|} + \frac{-e^2}{|r_2 - u_2|} + \frac{e^2}{|u_2 - u_1|} + \frac{e^2}{|r_1 - r_2|} .$$

Kleine Buchstaben sollen sich auf Elektronen, große auf Protonen ^{beziehen}. Die Numerierung der Teilchen ist so getroffen worden, daß die Elektronen und Protonen, welche sich in der Fig. 2 am nächsten sind, die gleiche Nummer tragen. Mit dieser speziellen Numerierung ist keinerlei Einschränkung verbunden, da eine Umnumerierung den Wert des Potentials in Gl. (21) ungeändert ließe. Wir können daher vereinbaren, bei Betrachtung der zeitlichen Veränderung des Systems die Nummer der Protonen jeweils dem ihnen nächsten Elektron zu übertragen. Diese Vereinbarung trägt der Ununterscheidbarkeit der Teilchen Rechnung, wie sie in der Quantenmechanik üblich und nötig ist.

Für ein System von je N Elektronen und Protonen ergibt sich analog zu Gleichung (21)

$$\frac{d}{dt} \sum_1^N (m(\dot{u}_i, \dot{u}_i) + M(\dot{r}_i, \dot{r}_i)) = \sum_1^N (m\dot{u}_i^2 + M\dot{r}_i^2) + \sum_1^N \frac{-e^2}{|r_i - u_i|} + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{-e^2}{|r_i - u_k|} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{|u_i - u_k|} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{|r_i - r_k|} \right) . \quad (22)$$

Der Potentialanteil der Doppelsumme hebt sich dann wie die untereinander geschriebenen Potentialglieder in Gl. (22) im zeitlichen und/ oder räumlichen Mittel auf. Darin kommt die Quasineutralität des Gebildes zum Ausdruck. Dieser Umstand wird bei der konkreten Potentialberechnung zu beachten sein.

Für die praktische Anwendung ist es ebenfalls nötig zu wissen, wie sich die kinetische Energie auf die Protonen und Elektronen verteilt. Aus der Lösung der ^{hier} (als Einkörperproblem behandelten) Beispiele als Zweikörperproblem ist bekannt, daß ihre Beträge im umgekehrten Verhältnis ihrer Massen stehen. Dies folgt für jedes konservative Zweikörper-System sofort aus dem Impulssatz.

Mit dem Schwerpunkt als Nullpunkt der Koordinaten gilt nämlich

$$m \dot{w} + M \dot{n} = \mathcal{P} + \mathcal{R} = 0$$

und damit $\mathcal{P}^2 = \mathcal{R}^2$, woraus $E_{kin}^e = \frac{1}{2m} \mathcal{P}^2 = \frac{M}{m} \frac{1}{2M} \mathcal{P}^2 = \frac{M}{m} \frac{1}{2M} \mathcal{R}^2 = \frac{M}{m} E_{kin}^p$.

folgt. Für ein N-Körper-System läßt sich ganz analog aus dem Impulssatz dagegen nur schließen, daß

$$m \sum_{i=1}^N \dot{w}_i^2 + m \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N (\dot{w}_i \dot{w}_k) = \frac{M}{m} \left(M \sum_{i=1}^N \dot{n}_i^2 + M \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N (\dot{n}_i \dot{n}_k) \right) \quad 23$$

gilt.

Hier kommt es zunächst nur darauf an, daß der vollständige Ausdruck für das Potential in Gl. (23) ^{bei ähnlichen Deformationen des Systems} homogen vom reziproken Abstand der Teilchen abhängt. Damit hängt es auch von der Dritten Wurzel aus dem reziproken Gesamtvolumen V ab, wenn die Gesamtzahl N der Teilchen konstant bleibt. D. h., daß das Potential proportional zur Dritten Wurzel aus der Anzahldichte $n = N/V$ ist.

Diese Abhängigkeit gilt dann auch für das zeitliche Mittel der potentiellen Energie und wegen des Virialsatzes ohne Einschränkung auch für das zeitliche Mittel der kinetischen Energie.

Damit geraten wir in einen fundamentalen Gegensatz zur Gesetzlichkeit entarteter Teilchen, hier der entarteten Elektronen, da deren kinetische Energie von der Dichte in der Zweidrittelpotenz abhängt. Dieser Widerspruch besteht aufgrund der obigen Herleitung allgemein zunächst nur vom Standpunkt der klassischen Physik aus. Die quantentheoretischen Beispiele hatten aber gezeigt, daß die klassische Quantentheorie die klassischen Energiewerte nicht modifiziert, sondern aus ihnen nur eine Auswahl trifft. Mit diesem gequantelten Energiewert gilt wie mit jedem klassischen Energiewert der Virialsatz. Der Beweis ist aber nur im Einzelfall zu erbringen, wozu die Kenntnis der Bahndurchlaufung nötig ist, wie am Beispiel des Keplerproblems verifiziert wurde.

VIII

Charakterisierung der Quantelung durch das Wirkungsintegral

Das Wirkungsintegral $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ läßt sich mit der Gl. (10) folgendermaßen schreiben;

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\sum p_i \dot{q}_i - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\sum P_i \dot{Q}_i - K) dt + S(t_2) - S(t_1),$$

Ist die Erzeugende S ein vollständiges Integral der H. J. Diffgl., so gilt $K \equiv 0$ und also $\dot{Q}_i = 0$, womit

$$\int_{t_1}^{t_2} (\sum p_i \dot{q}_i - H) dt = S(t_2) - S(t_1)$$

und speziell für ein konservatives System, d.h. mit $H = E$, $S = -Et + S^*$ und $p_i = \frac{\partial S^*}{\partial q_i}(q_i, Q)$,

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = \sum \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial S^*}{\partial q_i} dt = S^*(t_2) - S^*(t_1)$$

folgt. Sobald nun wie in unseren Beispielen die Wirkungsfunktion