$$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial S^*}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{m}\left(\frac{\partial S^*}{\partial y}\right)^2 + \alpha x^2 + \beta y^2 = \alpha Q_1^2 + \beta Q_2^2 \quad ,$$

die sich mit dem Ansatz

$$S = -(\alpha Q_1^2 + \beta Q_2^2)t + S_x^*(x,Q) + S_y^*(y,Q)$$

in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen separieren läßt;

$$\left(\frac{dS_x^*}{dx}\right)^2 - m\alpha(Q_1^2 - x^2) = \left(\frac{dS_y^*}{dy}\right)^2 - m\beta(Q_2^2 - y^2) = 0 \quad .$$

Daraus ergibt sich durch Quadratur

$$S_x^* = \sqrt{m\alpha}\int\sqrt{Q_1^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{m\alpha}\left(x\sqrt{Q_1^2-x^2} + Q_1^2 \arcsin\frac{x}{Q_1}\right),$$

$$S_y^* = \sqrt{m\beta}\int\sqrt{Q_2^2-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{m\beta}\left(y\sqrt{Q_2^2-y^2} + Q_2^2 \arcsin\frac{y}{Q_2}\right).$$

Aus den zweiten der Transformationsgleichungen (11) erhält man wie im ersten Beispiel die Bahngleichungen $x(t)$, $y(t)$, hier die Lissajousfiguren. Auf die Ausrechnung der Bahngleichung verzichten wir auch in diesem Beispiel und berechnen sogleich mit den ersten der Transformationsgleichungen (11) die Phasenintegrale und quanteln diese:

$$\oint\frac{\partial S^*}{\partial x}dx = \oint\frac{dS_x^*}{dx}dx = \oint p_x\,dx = 4\sqrt{m\alpha}\int_0^{Q_1}\sqrt{Q_1^2-x^2}\,dx = \sqrt{m\alpha}\;Q_1^2 = J_x h,$$

$$\oint\frac{\partial S^*}{\partial x}dx = \oint\frac{dS_y^*}{dx}dy = \oint p_y\,dx = 4\sqrt{m\beta}\int_0^{Q_2}\sqrt{Q_2^2-y^2}\,dx = \sqrt{m\beta}\;Q_2^2 = J_y h.$$

Daraus ergibt sich die quantentheoretische Gesamtenergie aus der klassischen Energiekonstanten

$$E = \frac{1}{2}(\alpha Q_1^2 + \beta Q_2^2) = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,J_x + \sqrt{\frac{\beta}{m}}\,J_y\right)h = (J_x\omega_x + J_y\omega_y)\hbar \, .$$

VI Der Virialsatz im Beispiel des Keplerproblems

Aus der oben ermittelten Gesamtenergie des Keplersystems

$$\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}Q_2^2\right) - \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{a} = E\,(\equiv Q_1)$$

folgt mit r = const. = a und damit $p_r = 0$, d.h. für Kreisbahnen, sofort

$$E_{kin} = \frac{1}{2m}\frac{1}{a^2}Q_2^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{a} = -\frac{1}{2}U = -E \quad ,$$

Diese Beziehung gibt den Virialsatz bei Coulombwechselwirkung wieder; die kinetische Energie ist gleich dem halben absoluten Betrag der potentiellen Energie und somit gleich dem absoluten Betrag der Gesamtenergie. Bei Ellipsenbahnen gilt diese Beziehung nur für die zeitlichen Mittelwerte der Energien bei einem Umlauf, also

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}Q_2^2\right)dt = \frac{1}{\tau}\frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{e^2}{r}dt = -Q_1 .$$

Zur Berechnung gehe man von der unter D angegebenen Transformationsgleichung $P_1 = -\frac{\partial S}{\partial Q_1}$ aus, woraus

$$dt = \frac{dt}{dr}dr = \left[2m\left(Q_1 + \frac{e^2}{r}\right) - \frac{1}{r^2}Q_2^2\right]^{-1/2} m\, dr$$

und damit

$$\frac{1}{\tau}\frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{e^2}{r}dt = \frac{1}{\tau}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{e^2}{r}\frac{dt}{dr}dr = \frac{1}{\tau} m e^2 \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \arcsin \frac{2\alpha r + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha Q_2}}\Bigg|_{r_{min}}^{r_{max}}$$

und

$$\tau = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dt}{dr}dr = \left(\frac{2m}{\alpha}\sqrt{\alpha r^2 + \beta r - Q_2} - \frac{m\beta}{\sqrt{-\alpha}} \arcsin \frac{2\alpha r + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha Q_2}}\right)\Bigg|_{r_{min}}^{r_{max}}$$

folgen, wo α und β die Abkürzungen $2mQ_1$ resp. $2me^2$ sind. Da $\sqrt{\alpha r^2 + \beta r - Q_2} = r\frac{\partial S^*}{\partial r} = r p_r$ in der letzten Gleichung mit dem radialen Impuls p_r an den Grenzen verschwindet, ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen der oben angegebene Wert

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{e^2}{r}dt = -\frac{e^2\alpha}{\beta} = -\frac{e^2 2m Q_1}{2me^2} = -Q_1 = -\frac{1}{2}\langle U \rangle$$

Der Virialsatz hängt vom zugrundeliegenden Kraftgesetz ab. Für das im zweiten Beispiel vorliegende lineare Kraftgesetz stellt die Beziehung $\langle E_{kin} \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2}E$ den Virialsatz dar. Der Nachweis soll sogleich auf allgemeinere Weise erbracht werden.