die der HAMILTON Mechanik zugrunde liegende Mathematik, und wir halten es für nicht möglich, ohne deren Kenntnis die Übereinstimmung oder Analogie von klassischer Mechanik und Quantenmechanik aufsuchen und beurteilen zu können.

9. Überleitung zur quantenmechanischen Ergänzung.

Aus der HEISENBERGschen Vertauschungsrelation

$$pq - qp = \frac{\hbar}{i} (\delta_{lm}) \qquad \text{(ab hier wieder: } i = \sqrt{-1}\text{)}$$

folgt allein in mathematischer Deduktion die Unschärferelation

$$((\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2)\ (\langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2))^{1/2} \geq \frac{1}{2}\hbar$$

oder, bezogen auf den Schwerpunkt $\langle q\rangle = 0$,

$$\sqrt{\langle p^2\rangle}\sqrt{\langle q^2\rangle} \geq \frac{1}{2}\hbar\ . \tag{71}$$

Mit Vorgabe des Erwartungswertes für das Impulsquadrat aus Gl. (1),

$$\langle p^2\rangle = (2\pi^2)^{1/3}\ m\ e^2\ n^{1/3} = i_f^2\ 2m\ E_{FERMI}\ , \tag{72}$$

ergeben sich die DE BROGLIE Wellenlänge $\lambda = h/\langle p^2\rangle^{1/2}$ und mit (71) der Ortserwartungswert zu

$$\sqrt{\langle q^2\rangle} \geq \frac{1}{2}\ (a_B\ (2\pi^2\ n)^{-1/3})^{1/2} = \frac{1}{2}\ a_B\ i_f = \frac{1}{2}\ \frac{1}{2\pi}\ \lambda\ ,$$

wonach mit $i_f^6\, n = (2\pi^2\, a_B^3\, n)^{-1}$, $n = n_B = 3.4 \times 10^{23}\ \mathrm{cm}^{-3}$ auch die Beziehungen

$$\sqrt{\langle q^2 \rangle} \geq \frac{1}{2}\,(2\pi^2)^{-1/3}\,(n_B\, n)^{-1/6}\,, \tag{73a}$$

$$\lambda = (4\pi)^{1/3}\,(n_B\, n)^{-1/6} = 2\pi\, a_B\, i_f \tag{73b}$$

gelten. Sodann bestehen für das geometrische Mittel der Abstände $n_B{}^{-1/3}$ und $n^{-1/3}$ die Relationen

$$(n_B\, n)^{-1/6} \lesseqgtr n^{-1/3} \qquad \text{für} \quad n \lesseqgtr n_B\,.$$

Damit sagen die Beziehungen (73a,b) aus, daß sich für $n < n_B$ Strukturen innerhalb der Abstandsstrecke $n^{-1/3}$ ausbilden können und erkennen lassen - an BALMER-Linien z.B. mit Quantenzahlen aus dem Intervall $2 \leq i \leq i_f$. Da die Ortszelle n^{-1} per definitionem im Mittel ein Teilchen enthält, ist die Anzahl der Teilchen in der kleineren Zelle $(n_B\, n)^{-1/2}$ kleiner als eins.

Für $n > n_B$ verhält es sich umgekehrt. Die Ortszelle $(n_B\, n)^{-1/2}$ ist größer als die Zelle n^{-1} und enthält mithin mehr als ein Teilchen. Der Erwartungswert (73a) ist nun größer als der Teilchenabstand $n^{-1/3}$, und aus dem Verhältnis der Wellenlänge zum Teilchenabstand $n^{-1/3}$

$$\lambda\, n^{1/3} = (4\pi)^{1/3}\,(n/n_B)^{1/6} > (4\pi)^{1/3} \tag{74}$$

folgt, daß die Wellenlänge den Teilchenabstand übergreift, so daß sich Einteilchenzustände nicht mehr ausbilden können. Mit $i_f < 1$ folgt auch, daß die Linien des BALMER-Spektrums z.B. jetzt zu einem Kontinuum verschmolzen sind.

Wird der Ortserwartungswert (73a) in die Relation (71) eingesetzt, so ergibt sich nach Potenzieren

$$\langle p^2 \rangle^{3/2} \, 4\pi \, (n_B \, n)^{-1/2} \geq h^3 \tag{75}$$

und daraus, daß für $n > n_B$ sowohl die Zelle $(n_B \, n)^{-1/2} > n^{-1}$ des Ortsraumes als auch die Elementarzelle h^3 des Phasenraumes mehr als ein Teilchen enthält. Es ist also gegen das Ausschließungsprinzip verstoßen worden.

Der Verstoß wird konventionell dadurch vermieden, daß statt des Erwartungswertes (73a) mit $(n \, n_B)^{1/2} \to n$ der Wert

$$\sqrt{\langle q^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} (2\pi^2)^{-1/3} \, n^{-1/3} \tag{76}$$

für alle $n \geq n_B$ vorgegeben wird, so daß die Relation (75) in

$$\langle p^2 \rangle^{3/2} \, 4\pi \, n^{-1} \geq h^3 \tag{77}$$

übergeht. Damit befindet sich dann per definitionem in der Zelle n^{-1} des Ortsraumes wie in der Elementarzelle h^3 des Phasenraumes stets höchstens nur ein Teilchen für alle $n \geq n_B$. Der aus (77) resultierende Erwartungswert des Impulsquadrats ist dann gleich dem aus Gl. (1),

$$\frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = \frac{1}{2} (2\pi^2)^{1/3} \, e^2 \, n^{1/3} = i_f^2 \, (2\pi^2)^{2/3} \, \frac{\hbar^2}{2m} \, n^{2/3} = i_f^2 \, E_{\text{FERMI}} \, ,$$

wenn darin $i_f = 1$ für alle $n > n_B$ gesetzt wird;

$$\frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle \to (2\pi^2)^{2/3} \, \frac{\hbar^2}{2m} \, n^{2/3} = E_{\text{FERMI}} \, .$$

Die Art der Herleitung zeigt, daß unter Aufwendung der FERMI-Energie Strukturen geortet werden können, deren Abmessungen stets mindestens so groß wie die des vorgegebenen, den Teilchenabständen $n^{-1/3}$ proportionalen Ortserwartungswertes (76) sind. Dem entspricht das für alle $n \geq n_B$ konstante Verhältnis von Wellenlänge zu Teilchenabstand $\lambda\, n^{1/3} = (4\pi)^{1/3}$ anstelle des nach Gl. (74). Die Elementarladung ist in den letzten drei Gleichungen nicht mehr enthalten, sie gelten daher nicht mehr nur für Elektronen.

Die so zu charakterisierende Energie kann die Energie eines physikalischen Systems nicht wiedergeben. Ihre Grundlage bildet allein das PAULIsche Prinzip, welches originär nicht Bestandteil der Quantenmechanik ist; es wurde ihr hinzugefügt. Da es in Verbindung mit der Unschärferelation angewendet wurde, entsteht die Frage auch nach deren Verbindlichkeit. Dieser Frage kann nur im Rahmen der HAMILTON-JAKOBIschen Theorie nachgegangen werden, da die Unschärferelation ein Appendix einer Vertauschungsrelation, einer Invarianten dieser Theorie, ist. Weil sich dabei über das Blickfeld der vorgelegten Arbeit hinaus neue Einsichten ergeben, soll dies nicht im Rahmen dieser Arbeit geschehen, sondern - vorläufig - in einer Ergänzung zu ihr.

10. Quantenmechanische Ergänzung zur Vervollständigung der Analogie von Quantenmechanik und klassischer Mechanik.

alias Supplement to Presentation and Applications of New Zero Energies

Summary: Excerpts are given from a fairly extensive comparison of classical mechanics with quantum mechanics, which show interpretation and use of the latter to be inappropriate and , in part, even false. Corrections are made here.

Das Ausschließungsprinzip, Grundlage der konventionellen Theorie der "Materieentartung", ist der Quantenmechanik appliziert. SOMMERFELD hielt dieses